Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

3

Dinámica

J. J. LOZANO LUCEA y J. L. VIGATÁ CAMPO

Alhambra Longman

Cuadernos de COU y
Selectividad

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

3

Dinámica

FÍSICA

Alhambra Longman

Producción editorial:
Dirección: José Luis Ferrer
Coordinación: Óscar García
Diseño: Gentil Andrade

ISBN 84-205-2124-8

Depósito legal: M. 20.872-1992

Impreso en España - Printed in Spain

Gráficas Rógar, S. A. - León, 44. Pol. Ind. Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid)

Contenido

Págs.

Recordatorio

Punto material

Llamamos *punto material* a una partícula, dotada de masa, cuyas dimensiones son despreciables en el correspondiente sistema de referencia.

Dinámica

Es la parte de la Física que estudia los movimientos atendiendo a las causas que los originan.

Concepto de fuerza

Llamamos *fuerza* a la causa capaz de provocar la deformación de un cuerpo o bien de modificar su estado de reposo o de movimiento.

Principios de Newton

Las leyes del movimiento descubiertas por Galileo y enunciadas por Newton podemos expresarlas como sigue:

Principio de la inercia

Si sobre un cuerpo no actúa fuerza neta, el cuerpo o está en reposo o permanece con movimiento rectilíneo y uniforme.

Principio del efecto dinámico de las fuerzas

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza neta, el cuerpo adquiere una aceleración directamente proporcional a la fuerza a la que está sometido.

A la constante de proporcionalidad entre la fuerza neta que actúa y la aceleración que sufre el cuerpo se le denomina *masa inerte* del cuerpo.

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

· Podemos decir también que cuando una fuerza neta actúa sobre un cuerpo inicialmente en reposo y que puede moverse libremente, genera en el mismo un movimiento uniformemente acelerado, de modo que la aceleración adquirida tiene la dirección y sentido de la fuerza.

Principio de acción y reacción

Cuando un cuerpo 1 ejerce sobre otro cuerpo 2 una fuerza $\vec{F}_{12}$ (fuerza de acción), el cuerpo 2 responde ejerciendo sobre el cuerpo 1 otra fuerza $\vec{F}_{21}$ (fuerza de reacción) que resulta ser igual y de sentido contrario a la primera.

Hay que hacer notar que aunque las fuerzas actúen siempre por parejas, una fuerza de acción y su correspondiente reacción nunca pueden anularse recíprocamente, pues son fuerzas que actúan sobre cuerpos distintos.

Otros principios de la Mecánica clásica

Principio de homogeneidad e isotropía del espacio

El espacio, en ausencia de materia y de campos, es homogéneo e isótropo, es decir, presenta las mismas propiedades en todos sus puntos y en todas las direcciones.

Principio de la gravitación universal

Todos los cuerpos se atraen, por el hecho de tener masa, con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los mismos. La constante de proporcionalidad G recibe el nombre de constante de gravitación universal.

$$\boxed{\vec{f} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\mathbf{r}|}}$$

Sistemas de referencia

El cálculo de la aceleración que provoca una fuerza o el de la fuerza que origina a una determinada aceleración exige el análisis del sistema de referencia empleado, pues, en función del sistema de referencia empleado, se pueden obtener valores diferentes para la fuerza que actúa sobre una partícula determinada, con lo que el Principio del efecto dinámico de las fuerzas dejaría de tener validez general.

En Dinámica consideramos dos clases de sistemas de referencia: inerciales y no inerciales.

Sistemas inerciales

Son los sistemas que están en reposo o están en movimiento rectilíneo y uniforme. En estos sistemas de referencia son válidos los Principios de Newton, y reciben por ello la denominación de *sistemas newtonianos.*

Sistemas no inerciales

Son los sistemas que están sometidos a una aceleración. Para que en estos sistemas puedan darse por válidos los Principios de Newton es preciso introducir unas fuerzas ficticias, denominadas *fuerzas de inercia.*

D'Alembert explicó el comportamiento de estos sistemas a través del principio que lleva su nombre y que podemos enunciar diciendo: *Cuando un cuerpo se ve sometido a una aceleración* $\vec{a}_s$ *por la acción de una fuerza, aparece sobre el cuerpo una fuerza* *igual y opuesta a la primera y de valor* $-\overrightarrow{ma_s}$, *a la que se denomina fuerza de inercia.*

La fuerza de inercia se define, pues, para los cuerpos sometidos a aceleración y es igual y de sentido contrario a la fuerza que los acelera.

En los sistemas no inerciales, para obtener las aceleraciones de los distintos cuerpos hay que componer las fuerzas reales y las fuerzas de inercia (inexistentes en los sistemas inerciales).

Principio del equilibrio dinámico de D'Alembert

La suma de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema, incluidas las fuerzas de inercia, es siempre igual a cero.

$$\boxed{\Sigma \vec{F} + \Sigma \vec{F_i} = 0}$$

Rozamiento

Se denomina *rozamiento* a la resistencia al avance de un cuerpo en contacto con un medio material. La forma más sencilla de rozamiento es el rozamiento de deslizamiento que se origina entre superficies de sólidos en contacto y es debido a las fuerzas de adherencia y al encaje entre las rugosidades que presentan las superficies.

La fuerza de rozamiento siempre se opone a la fuerza que provocaría movimiento, llegue a originarlo o no. En el caso de que el cuerpo se mueva, la fuerza de rozamiento tiene sentido contrario al movimiento y la misma dirección que éste. Si el cuerpo no se mueve, la fuerza de rozamiento es exactamente igual y opuesta a la fuerza que la origina.

Experimentalmente se comprueba que la fuerza de rozamiento entre un cuerpo y la superficie sobre la que se apoya, es directamente proporcional a la *fuerza normal* que recíprocamente se ejercen la superficie y el cuerpo, de modo que

$$\boxed{F_r = K \cdot N}$$

en donde K recibe la denominación de *coeficiente de rozamiento.*

Cuando el cuerpo que estudiamos y la superficie sobre la que se apoya no están en movimiento relativo, las fuerzas de adherencia y el encaje son más intensos que cuando se desplazan recíprocamente. Se distinguen así, para cada pareja de naturalezas de las superficies que rozan, un coeficiente de rozamiento estático K_e o μ_e, que corresponde a la situación en que el móvil no se desplaza bajo la acción de la fuerza pero está a punto de hacerlo (corresponde al valor máximo de la fuerza de rozamiento para un cuerpo en reposo), y un coeficiente de rozamiento dinámico K_d o μ_d, que corresponde a la situación en la que el móvil se desplaza con movimiento uniforme con respecto a la superficie de apoyo. Se comprueba experimentalmente que $K_e > K_d$.

La fuerza de rozamiento entre dos cuerpos depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto.

Entre dos cuerpos dados, el módulo de la fuerza de rozamiento es independiente de la magnitud de las superficies puestas en contacto.

Entre dos cuerpos dados, el módulo de la fuerza de rozamiento es independiente de la magnitud de las superficies puestas en contacto.

Entre dos cuerpos dados, el módulo de la fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la fuerza normal existente entre los mismos.

La fuerza de rozamiento entre un cuerpo y la superficie sobre la que se desliza es independiente de la velocidad con que se desplaza el cuerpo.

En esta gráfica F_{re} representa la fuerza de rozamiento estático, que en cada momento vale lo mismo que la fuerza aplicada, y F_{rd} es la fuerza de rozamiento dinámico, a la que consideramos constante mientras dura el movimiento (para valores de la fuerza aplicada superiores al de F_u, fuerza umbral).

Impulso mecánico

Definimos el *impulso mecánico,* o *impulso lineal,* que experimenta una partícula bajo la acción de una fuerza a un vector que viene definido por

$$\boxed{\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}} \cdot dt}$$

en donde $\vec{F}$ es la fuerza que actúa y $t_f - t_i$ es el intervalo de tiempo durante el que actúa la fuerza. Si la fuerza es constante, el impulso puede expresarse como

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t}$$

Cantidad de movimiento

Para una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ definimos una magnitud vectorial $\vec{p}$, a la que denominamos *cantidad de movimiento*, cuya dirección y sentido son, en cada instante, los del vector velocidad, y cuyo módulo viene dado por mv, de modo que

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

Cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza, sufre una aceleración que supone un cambio de velocidad y la consiguiente variación en la cantidad de movimiento.

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{v_i}^{v_f} m\, d\vec{v} = \int_{v_i}^{v_f} d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

es decir

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

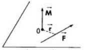
Podemos concluir, pues, que cuando sobre una partícula actúa una fuerza durante un cierto tiempo, el impulso mecánico de la fuerza se invierte en modificar la cantidad de movimiento de la partícula.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Cuando sobre una partícula no actúan fuerzas netas exteriores, la cantidad de movimiento de la partícula permanece constante.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{I} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p_i} = \vec{p_f}$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto



$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Llamamos *momento de una fuerza con respecto a un punto* a un vector axial, perpendicular al plano que determinan la fuerza y el punto, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos para diestros que girase como lo haría la fuerza alrededor del punto, y cuyo módulo se identifica con el producto del módulo de la fuerza por la mínima distancia entre la fuerza y el punto. Esto es lo mismo que decir que el momento de una fuerza $\vec{F}$ con respecto a un punto 0 es el producto vectorial entre el vector de posición del origen del vector fuerza (tomando como origen de coordenadas el punto 0) y el vector fuerza.

El efecto que provoca este momento al actuar sobre la partícula es un giro alrededor del punto 0, y si el momento es constante, el movimiento será circular uniformemente acelerado. La aceleración angular vendrá dada en este último caso por

$$\vec{a} = \frac{\vec{M}}{mr^2}$$

siendo m la masa de la partícula. Al producto mr^2 se le conoce como *momento de inercia de la partícula respecto al punto 0.* El momento de inercia es una magnitud escalar y se representa por I.

La expresión

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$$

es una forma de la ecuación fundamental de la dinámica de rotación de una partícula alrededor de un punto.

Impulso angular

Se define como *impulso angular de una partícula* en rotación, a un vector axial cuya dirección y sentido son los del momento de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula (con respecto al centro de giro) y cuyo módulo se identifica con el producto del módulo del vector momento resultante por el tiempo durante el que actúan las fuerzas que lo originan.

$$\boxed{\overrightarrow{\text{Imp. ang.}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{M}} \cdot dt}$$

Haciendo uso de las relaciones ya conocidas podemos poner

$$\overrightarrow{\textbf{Imp. ang.}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{M}} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{r}} \times m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \; dt =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{r}} \times \mathrm{d}\, \vec{\mathbf{p}}$$

o también

$$\overrightarrow{\textbf{Imp. ang.}} = \int_{t_1}^{t_f} \vec{\mathbf{M}} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{I}\vec{\alpha} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{p}}$$

Momento cinético de una partícula con respecto a un punto

Se define como *momento cinético de una partícula con respecto a un punto* a una magnitud vectorial que se identifica con el producto vectorial del vector de posición de la partícula (tomando como origen de coordenadas el punto O) y el vector cantidad de movimiento de la partícula con respecto al mismo punto.

$$\boxed{\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}}$$

El momento cinético de una partícula es, por lo tanto, el momento de su cantidad de movimiento.

El momento cinético de una partícula cambia, en general, con el tiempo, y su variación podemos expresarla como

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}}$$

ya que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

por ser $\vec{v}$ y $\vec{p}$ vectores de la misma dirección, y

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Por consiguiente, la variación del momento cinético de una partícula con el tiempo es igual al momento de la fuerza que actúa sobre la partícula.

Haciendo uso de las relaciones entre las magnitudes lineales y las angulares podemos poner también

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

Teorema de conservación del momento cinético

Cuando la resultante de los momentos que actúan sobre una partícula es nula, el momento cinético de la misma permanece constante.

Si

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Esto se traduce en que en estas condiciones:

- La trayectoria debe mantenerse en el mismo plano.
- Si la masa permanece constante, ω aumentará cuando disminuya r y viceversa, ya que el producto $I\omega$ ha de permanecer constante.

Expresado de otro modo,

$$\boxed{\Delta I\vec{\omega} = 0}$$

Sistemas de partículas

Llamamos *sistema de partículas* a un conjunto de partículas claramente delimitado.

Un sistema discreto de partículas está constituido por un número medible de partículas y éstas están localizadas. La masa de un sistema de este tipo puede determinarse con sólo sumar las masas de las partículas constituyentes, de modo que

$$M = m_1 + m_2 + \dots m_n = \Sigma m_i$$

Cuando se tiene un sistema continuo de partículas en el que se pasa de unas a otras sin solución de continuidad y sin que pueda determinarse la situación individual de cada partícula, la determinación de la masa del sistema requiere la resolución de la integral

$$\int dm = M$$

Para estudiar la dinámica de los sistemas de partículas conviene distinguir dos tipos de fuerzas:

- *Fuerzas internas,* que surgen de la interacción entre las partículas del sistema y que, cumpliendo el principio de acción y reacción, no producen efecto dinámico sobre el conjunto de sistema, pues constituyen un conjunto de parejas de fuerzas iguales y opuestas dos a dos, cuya resultante para el sistema es nula.
- *Fuerzas externas,* que actúan sobre las partículas del sistema y proceden del exterior del sistema, originando efectos dinámicos sobre el conjunto.

La clasificación de las fuerzas en internas o externas depende de cómo se haya definido el sistema. Por consiguiente, es preciso definir con claridad el sistema antes de asignar carácter a una fuerza.

Centro de masas de un sistema de partículas

La dificultad de estudiar la dinámica de un sistema de partículas, atendiendo a cada una de las partículas constituyentes del mismo, puede soslayarse introduciendo la idea de centro de masas del sistema, que permite estudiar el movimiento del sistema como si se tratase del de una partícula única que concentrase toda la masa del sistema y sobre la cual actuase una fuerza que fuese la fuerza resultante de todas las que actúan sobre las partículas del sistema.

Con carácter general, la posición del centro de masas de un sistema de partículas viene expresada por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\Sigma \vec{r}_i m_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma \vec{r}_i m_i}{M}$$

en donde los distintos $\vec{r}_i$ son los vectores de posición de las correspondientes partículas del sistema, las distintas m_i son las masas respectivas y M representa la masa total del sistema.

Para un sistema de partículas discreto, y a partir de las componentes cartesianas del vector de posición del centro de masas, podemos deducir el valor de las coordenadas correspondientes a este último:

$$x_{CM} = \frac{\Sigma x_i m_i}{M} \quad ; \quad y_{CM} = \frac{\Sigma y_i m_i}{M} \quad ; \quad z_{CM} = \frac{\Sigma z_i m_i}{M}$$

Centro de masas de una distribución de masa continua y homogénea

Para un sistema de partículas continuo, es decir, que esté formado por un número muy grande de partículas muy pequeñas que en conjunto constituyan un todo homogéneo

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x \cdot dm \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \cdot dm \quad ;$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \cdot dm$$

Movimiento del centro de masas

Si consideramos un sistema constituido por n partículas que interactúan entre sí y están sometidas a la acción de fuerzas exteriores, el vector de posición del centro de masas del mismo vendrá dado en cada instante por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

en donde M es la masa total del sistema de partículas. Por derivación de esta expresión con respecto al tiempo podemos obtener la velocidad con que se mueve el centro de masas del sistema:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

Análogamente, por derivación con respecto al tiempo de la expresión que nos da la velocidad, podemos obtener la aceleración en cada instante del centro de masas:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{a}_i}{M}$$

Las fuerzas interiores no afectan al movimiento del centro de masas del sistema.

Dinámica del centro de masas de un sistema de partículas

Cantidad de movimiento

Si derivamos respecto al tiempo la expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

obtenemos

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\,\Sigma\, m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

de donde

$$\boxed{M \cdot \vec{v}_{CM} = \Sigma\, m_i \cdot \vec{v}_i}$$

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual a la cantidad de movimiento del centro de masas, supuesto que estuviese concentrada en él toda la masa del sistema.

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento

Si representamos la suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema como $\Sigma\overrightarrow{\mathbf{F}_{ei}}$, podremos poner

$$\Sigma\overrightarrow{\mathbf{F}_{ei}} = \frac{d}{dt}\,\Sigma m_i\overrightarrow{\mathbf{v}_i}$$

Si la suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula, podemos concluir que

$$\Sigma m_i\overrightarrow{\mathbf{v}_i} = \text{constante}$$

Esta conclusión, conocida como *teorema de conservación de la cantidad de movimiento* para un sistema de partículas, puede enunciarse diciendo: *Cuando la suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es nula, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante.* También podemos enunciarlo diciendo: *La cantidad de movimiento de un sistema aislado permanece constante.*

Momento cinético

El momento cinético de un sistema de partículas respecto a un punto 0 es una magnitud vectorial que se identifica con el producto del vector de posición del centro de masas del sistema respecto a dicho punto 0 por la cantidad de movimiento del sistema respecto al mismo punto.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{CM} \times \Sigma\, m_i \times \overrightarrow{\mathbf{v}_i}}$$

El momento cinético de un sistema es, por lo tanto, el momento de su cantidad de movimiento.

El momento cinético de un sistema cambia, en general, con el tiempo, y su variación podemos expresarla como

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{M}_{ei}}$$

ya que

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times \vec{p}_{CM} = 0$$

por ser $\vec{v}_{CM}$ y $\vec{p}_{CM}$ vectores de la misma dirección, y

$$\vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \Sigma\vec{F}_{ei} = \Sigma\vec{M}_{ei} = \vec{M}$$

Por consiguiente, la variación del momento cinético de un sistema con el tiempo es igual al momento total originado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. En el caso de que no actúe momento total sobre el sistema, se cumplirá que

$$\boxed{\Delta I\omega = 0}$$

Teorema de conservación del momento cinético

Cuando la resultante de los momentos que actúan sobre un sistema es nula, el momento cinético del mismo permanece constante.

Si

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{M}_{ei} \quad = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Momento de inercia de un sistema de partículas

Siendo el momento de inercia de una partícula una magnitud escalar, para un sistema de partículas discreto se verifica

$$\boxed{I = \Sigma\, m_i \cdot r_i^2}$$

en donde I representa el momento de inercia del sistema de partículas.

Sólido rígido

Es un sistema de partículas en el que las posiciones relativas de las mismas permanecen fijas y, por lo tanto, las distancias relativas constantes.

En el caso de un sólido rígido, el movimiento del sistema puede estudiarse considerando que, en cualquier instante, puede descomponerse en:

- Un movimiento puro de traslación del centro de masas.
- Un movimiento puro de rotación del centro de masas.

Cuando un sólido rígido experimenta una traslación pura todos sus puntos poseen la misma velocidad, y tomamos como velocidad de traslación del sólido la velocidad de su centro de masas.

Cuando un sólido rígido experimenta una rotación pura, todos sus puntos describen circunferencias, cuyos centros se encuentran sobre una recta a la que se denomina *eje de rotación* y que es perpendicular a las trayectorias de las partículas que giran. La velocidad y la aceleración tangencial de las distintas partículas dependen de la distancia de las mismas al eje de rotación; sin embargo, la velocidad angular y la aceleración angular son las mismas para todas las partículas del sólido.

Dinámica de rotación del sólido rígido

Cuando un sólido rígido rota alrededor de un eje, son de plena validez las consideraciones que hemos realizado para los sistemas de partículas. Conviene, sin embargo, tener en cuenta determinadas peculiaridades que facilitan la aplicación de las ideas que hemos expuesto a un sistema de partículas continuo. Al ser constante la aceleración angular α para todas las partículas constituyentes del sólido, podemos poner

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \vec{\alpha} \int r^2\, dm$$

en donde

$$\int r^2 dm = I$$

siendo I el momento de inercia del sólido respecto al eje de giro, y en consecuencia

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$$

El cálculo del valor de los momentos de inercia puede simplificarse con la introducción del concepto de *radio de giro*, Rg, que es *la distancia que debería existir entre un punto material de masa igual a la del sólido y el eje de giro para que el momento de inercia del punto material resultase ser el mismo que el del sólido.*

Conocido el momento de inercia de un sólido con respecto a un eje, es fácil calcular el momento de inercia del mismo sólido con respecto a otro eje paralelo al primero, por aplicación, simple o reiterada, del *Teorema de Steiner*, que dice: *El momento de inercia de un sólido respecto a un eje es igual al momento de inercia del sólido respecto a otro eje, paralelo al primero, que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del sólido por el cuadrado de la distancia entre los ejes.*

$$\boxed{I = I_o + md^2}$$

Cuestiones

Salvo indicación en contra, supondremos constante el valor de g e igual a 9,8 m s^{-2}.

1. Una piedra que gira sujeta al extremo de una cuerda lo hace sometida a una fuerza central. V F

2. Cuando disponemos de sendas masas iguales situadas en los platillos de una balanza analítica y se acelera la balanza verticalmente y hacia arriba, la balanza continúa en equilibrio. V F

3. Se lanza un cuerpo verticalmente y hacia arriba. Teniendo en cuenta el rozamiento del aire, se llega a la conclusión de que el móvil tarda más tiempo en subir que en bajar. V F

4. Cuando un cuerpo con velocidad v choca contra un muelle, su velocidad disminuye hasta que el cuerpo se detiene, pero su energía cinética permanece constante. V F

5. La cantidad de movimiento de un sistema se conserva siempre. V F

6. El Principio de la inercia explica el hecho de que al cortar una cuerda en cuyo extremo gira una piedra, esta última salga disparada tangencialmente en vez de salir radialmente. V F

7. Las fuerzas de acción y reacción se anulan siempre por ser iguales y opuestas. V F

8. Si un cuerpo cae en el aire desde mucha altura, es posible que llegue un momento en que su velocidad sea constante. V F

9. Viajando en el interior de un vehículo, sin tener referencias exteriores, es imposible saber si está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme. V F

10. Viajando en el interior de un vehículo, sin tener referencias exteriores, es imposible saber si el vehículo está acelerando. V F

11. Si un cuerpo tiene doble masa que otro, sufre, situados ambos en el mismo lugar, una atracción gravitacional que también es doble. V F

12. Si un cuerpo tiene doble masa que otro y están situados ambos en el mismo lugar, sufren la misma aceleración de caída libre. V F

13. Una fuerza no equilibrada puede actuar sobre un cuerpo sin modificar el módulo de la velocidad del mismo. V F

14. La fuerza de rozamiento entre dos cuerpos aumenta al aumentar el área de las superficies puestas en contacto. V F

15. Las fuerzas de rozamiento nunca pueden producir movimiento. V F

16. Si un cuerpo está en reposo la fuerza máxima de rozamiento es igual al peso del cuerpo. V F

17. Los motoristas inclinan sus máquinas en las curvas para disminuir el rozamiento con el aire. V F

18. Un cuerpo puede tener infinitos momentos de inercia. V F

19. Para que un cuerpo esté girando no es preciso que actúen sobre él un par o un momento. V F

20. Cuando un cuerpo asciende con movimiento uniforme por la acción de un hilo inextensible y sin peso que estira verticalmente del mismo, la tensión del hilo es igual al peso del mismo. V F

21. Cuando un cuerpo asciende con movimiento uniformemente acelerado por la acción de un hilo inextensible y sin peso que estira verticalmente del mismo, la tensión del hilo es menor que el peso del mismo. V F

22. Cuando un cuerpo asciende con movimiento uniforme en un montacargas, pesa lo mismo que cuando el montacargas se detiene. V F

23. Cuando un cuerpo asciende con movimiento uniformemente acelerado en un montacargas, pesa más que cuando el montacargas se detiene. V F

24. Un aumento en la temperatura global de la Tierra que provocase una fusión importante de los casquetes polares daría lugar a una modificación en la duración del día solar medio. V F

25. Si el momento cinético de un sistema, respecto de un punto, es nulo, podemos afirmar que todos los puntos del sistema se encuentran en reposo. V F

26. La fuerza centrípeta no realiza trabajo sobre una partícula en movimiento. V F

27. El momento de inercia de un sólido, respecto a un eje, puede hallarse considerando toda su masa concentrada en el centro de masas y tratándolo como a un punto material. V F

Soluciones a las cuestiones propuestas

1	V	8	V	15	V	22	V
2	V	9	V	16	F	23	F
3	F	10	F	17	F	24	V
4	F	11	V	18	V	25	F
5	F	12	V	19	V	26	V
6	V	13	V	20	V	27	F
7	F	14	F	21	F		

Ejercicios resueltos

Salvo indicación en contra, adoptaremos para g el valor constante de 9,8 m s^{-2} y consideraremos los cuerpos como puntos materiales.

1. Un astronauta de 84 kg puede aguantar en la Tierra 120 kg contando su propio peso. Sabiendo que en la Luna la gravedad es la sexta parte de la de la Tierra, ¿qué masa de equipo puede llegar a transportar en la Luna? ¿Cuánto pesa el astronauta en la Luna?

Resolución

Entendiendo que los 120 kg que menciona el enunciado son 120 kp, el peso que el astronauta puede soportar es de

$$120 \text{ kp} - 84 \text{ kp} = 36 \text{ kp}$$

Si suponemos que el peso que puede soportar el astronauta es el mismo en la Luna que en la Tierra, la masa extra que podrá transportar es

$$m = \frac{P_L}{g_L} = \frac{36 \text{ kp} \cdot 9{,}8 \text{ N kp}^{-1}}{\frac{9{,}8}{6} \text{ m s}^{-2}} = 216 \text{ kg}$$

Si consideramos que la fuerza que puede hacer el astronauta incluye el efecto favorable del descenso de su propio peso, podemos concluir que su organismo podrá con

$$m = \frac{P_L}{g_L} = \frac{120 \text{ kp} \cdot 9{,}8 \text{ N kp}^{-1}}{\frac{9{,}8}{6} \text{ m s}^{-2}} = 720 \text{ kg}$$

pero de esta manera habremos de descontar la del propio astronauta (que habrá de moverse a sí mismo), con lo que la masa extra que podrá llegar a trasladar será

$$m' = 720 \text{ kg} - 84 \text{ kg} = \mathbf{636 \text{ kg}}$$

El peso del astronauta en la Luna será

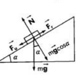
$$P_L = m \cdot g_L = 84 \text{ kg} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \frac{1}{9{,}8} \text{ kp N}^{-1} = \mathbf{14 \text{ kp}}$$

2. Un bloque se encuentra en reposo sobre un plano inclinado. El coeficiente dinámico de rozamiento vale 0,50 y el coeficiente estático 0,75. Calcular:

a) Ángulo mínimo para el cual el bloque inicialmente en reposo comienza a deslizarse.

b) Aceleración con que desciende el bloque, para este ángulo de inclinación.

c) Tiempo necesario para que el bloque recorra los primeros 6 m.



$F_u = m \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha$
$F_r = \mu_e \cdot F_N = 0{,}75 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$

Resolución

a) El bloque comienza a deslizarse cuando la componente útil del peso es igual y opuesta a la fuerza de rozamiento estática.

Por consiguiente,

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\, a = 0{,}75\, m \cdot g \cdot \cos a$$
$$\text{tg}\, a = 0{,}75$$

de donde

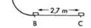
$$\boldsymbol{a} = \mathbf{36°52'}$$

b) La fuerza que produce la aceleración es $\vec{F}_u - \vec{F}_r$, siendo ahora $F_r = \mu_d \cdot F_N$.

$$m \cdot a = F_u - F_r = m \cdot g \cdot \text{sen } 36°52' - 0{,}4\, m \cdot g \cdot \cos 36°52'$$
$$\boldsymbol{a} = g \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \cdot g \cdot 0{,}80 = 0{,}28\, g = \mathbf{2{,}74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

c) Teniendo en cuenta la cinemática del movimiento

$$t^2 = \frac{2 \cdot e}{a} = \frac{12 \text{ m}}{2{,}74 \text{ m s}^{-2}} = 4{,}38 \text{ s}^2$$
$$\boldsymbol{t} = \mathbf{2{,}1 \text{ s}}$$



3. Un bloque de 1 kg se deja libre en un punto A sobre una pista constituida por un cuadrante de circunferencia de radio 1,5 m. Se desliza sobre la pista y alcanza el punto B con una velocidad de 3,6 m s^{-1}. Desde el punto B se desliza sobre una superficie horizontal a lo largo de 2,7 m y se para. Calcular:

a) Coeficiente de rozamiento sobre la superficie horizontal.

b) Trabajo realizado contra las fuerzas de rozamiento cuando el bloque pasa del punto A al punto B.

Resolución

a) De los datos cinemáticos deducimos

$$2{,}7 = \frac{1}{2}\, a_{BC} \cdot t^2{}_{BC} \qquad \text{(SI)}$$

$$3{,}6 = a_B \cdot t_{BC} \qquad \text{(SI)}$$

sistema que, resuelto, nos conduce a

$$a = 2{,}4 \text{ m s}^{-2}$$

y como

$$a = \frac{f_{roz}}{m} = \frac{\mu\, mg}{m}$$

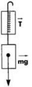
$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{2{,}4 \text{ m s}^{-2}}{9{,}8 \text{ m s}^{-2}} = 0{,}24$$

b) El trabajo contra las fuerzas de rozamiento se identificará con la pérdida de energía mecánica.

$$W_r = E_{pA} - E_{cB} =$$
$$= 2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 1{,}5 \text{ m} - \frac{1}{2} 2 \text{ kg} \cdot 3{,}6^2 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} = 16{,}5 \text{ J}$$

4. Un cuerpo está suspendido de un dinamómetro sujeto del techo de un ascensor.

a) Si el ascensor tiene aceleración hacia arriba de 1,2 m s^{-2} y el dinamómetro indica 22,5 kg, ¿cuál es el verdadero peso del cuerpo?



b) ¿En qué circunstancia indicará el dinamómetro 17,5 kg?

c) ¿Qué indicará el dinamómetro si se rompe el cable del ascensor?

Resolución

Sobre el cuerpo actúan permanentemente su propio peso $\overrightarrow{mg}$ y la fuerza $\vec{T}$ que realiza el muelle del dinamómetro. La suma de esas dos fuerzas $\overrightarrow{ma}$, es la resultante que acelera al cuerpo.

a) Como $\vec{T} + \overrightarrow{mg} = \overrightarrow{ma}$

$$22{,}5 \cdot 9{,}8\,\vec{j} + 9{,}8\ \text{m} \cdot (-\vec{j}) = 1{,}2\ \text{m}\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

de donde

$$\mathbf{m = 20\ kg}$$

b) Cuando el dinamómetro nos indique 17,5 kp

$$17{,}5 \cdot 9{,}8\,\vec{j} + 9{,}8 \cdot 20\,(-\vec{j}) = 20\ \text{a}\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

de donde

$$\boldsymbol{a} = -1{,}2\ \text{m s}^{-2}$$

Es decir, **el ascensor desciende con una aceleración de 1,2 m s^{-2}.**

c) Si el ascensor baja en caída libre, la aceleración del sistema es g $(-\vec{j})$ y

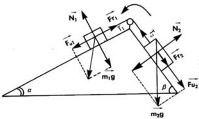
$$\vec{T} + \text{mg}\,(-\vec{j}) = \text{mg}\,(-\vec{j})$$

de modo que al ser $\vec{T} = 0$, **el dinamómetro no registra peso.**

5. En el sistema dibujado, calcular:

a) Aceleración del conjunto de los dos bloques.

b) Tensión de la cuerda.



($\alpha = 30°, \beta = 60°, m_1 = 100$ g, $m_2 = 600$ g, $\mu = 0,2$; se consideran despreciables las masas de la cuerda y de la polea.)

Resolución

Para poder asignar un sentido a las fuerzas de rozamiento, hemos de suponer un sentido de desplazamiento del sistema, supongamos que m_1 desciende.

Las fuerzas normales a las superficies de los respectivos planos inclinados no producen movimiento, ya que en cada caso las componentes normales del peso son exactamente equilibradas por las respectivas reacciones de los planos inclinados.

Sobre cada uno de los dos cuerpos, y paralelamente a los respectivos planos inclinados, actúan: la componente útil del peso, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento. Por otra parte, al estar ligados por la cuerda y permanecer ésta tensa, ambos cuerpos se mueven solidariamente (con la misma velocidad y sometidos a la misma aceleración a).

Para el cuerpo m_1

$$F_{u1} - T_1 - F_{r1} = m_1\, a$$

desarrollando

$$m_1\, g \operatorname{sen} \beta - T_1 - \mu\, m_1\, g \cos \beta = m_1\, a$$

Para el cuerpo m_2

$$T_2 - F_{u2} - F_{r2} = m_2\, a$$

desarrollando

$$T_2 - m_2\, g \operatorname{sen} \alpha - \mu\, m_2\, g \cos \alpha = m_2\, a$$

Teniendo en cuenta que $T_1 = T_2 = T$, y sustituyendo los valores que nos han proporcionado, obtenemos el sistema

$$0{,}744 - T = 0{,}1\, a$$
$$T - 3{,}95 = 0{,}6\, a$$

que nos da un valor para a de $-4{,}58$ m s^{-2} y nos indica que el sentido de desplazamiento que arbitrariamente hemos supuesto para el sistema no es correcto y, en consecuencia, hemos de replantear las ecuaciones de acuerdo con el sentido correcto de desplazamiento:

Para el cuerpo m_1

$$T_1 - m_1\, g \operatorname{sen} \beta - \mu\, m_1\, g \cos \beta = m_1\, a$$

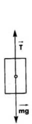
Para el cuerpo m_2

$$m_2\, g \operatorname{sen} \alpha - T_2 - \mu\, m_2\, g \cos \alpha = m_2\, a$$

y ahora llegamos al sistema

$$T - 0{,}94 = 0{,}1\, a$$
$$1{,}93 - T = 0{,}6\, a$$

que nos da para a un valor de 1,4 m s^{-2} y para la tensión de la cuerda un valor $T = 1{,}1$ N. En el supuesto de que también en este caso hubiéramos obtenido un valor negativo para la aceleración, deberíamos concluir que las fuerzas de rozamiento impedían el desplazamiento del sistema.



$m \cdot a = T - m \cdot g$

6. Una grúa levanta un peso de 600 kg con una aceleración de 0,5 m s^{-2}. Calcular la tensión que soporta el cable.

Resolución

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la tensión y el peso, de modo que

$$m \cdot a = T - m \cdot g$$

Cuando en el enunciado nos dicen 600 kg de peso entendemos 600 kp, que corresponden, en las condiciones de trabajo, al peso de un cuerpo de 600 kg de masa. Por consiguiente,

$$T = m \cdot a + m \cdot g$$

$$\boldsymbol{T} = 600 \cdot 0{,}5 \text{ N} + 600 \cdot 9{,}8 \text{ N} = \mathbf{6180 \text{ N}}$$

7. Una piedra de 1 kg ligada al extremo de una cuerda de 0,5 m gira con una velocidad de 2 r.p.s. Calcular:

a) Energía cinética.

b) Fuerza centrípeta que actúa sobre la cuerda.

c) Trabajo que realiza la fuerza centrípeta en una revolución.

d) Si la cuerda se rompe por la mitad, ¿cuál será su velocidad angular y su energía cinética?

Resolución

a) La velocidad lineal con la que gira la piedra es

$$v = r\omega = 0{,}5 \text{ m} \cdot 2 \text{ r.p.s.} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} = 2\pi \text{ m s}^{-1}$$

y la energía cinética

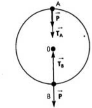
$$\boldsymbol{Ec} = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} 1 \text{ kg} \cdot (2\pi \text{ m s}^{-1})^2 = \mathbf{2\ \pi^2\ J}$$

b) La fuerza centrípeta que se ejerce sobre la cuerda y que ésta transmite a la piedra vale

$$\boldsymbol{Fc} = m \frac{v^2}{r} = 1 \text{ kg} \frac{(2\pi \text{ m s}^{-1})^2}{0{,}5 \text{ m}} = \mathbf{8\ \pi^2\ N}$$

c) La fuerza centrípeta no realiza trabajo porque es permanentemente perpendicular a la trayectoria.

d) Supuesto que la cuerda no pesa y que la pregunta se refiere a la piedra, como al romperse la cuerda deja de actuar la fuerza centrípeta, **la piedra dejará de girar** y saldrá disparada siguiendo el principio de la inercia. Al no actuar fuerzas exteriores al sistema, en el momento de producirse la rotura la energía cinética seguirá valiendo lo mismo que en el instante anterior, es decir **$2\pi^2$ J.** Si la piedra se encuentra en un campo gravitatorio, a partir del momento en que ha salido disparada, iniciará un tiro parabólico y su energía cinética se modificará en función de cómo cambie su energía potencial.



8. Un cuerpo con una masa de 2 kg está ligado al extremo de una cuerda de 100 cm de longitud. Girando verticalmente, con una velocidad angular constante, describe una trayectoria circular, y cuando pasa por el punto más bajo, la tensión de la cuerda es de 100 N. Suponiendo que en este momento se rompe la cuerda, calcular:

a) Con qué velocidad saldrá disparado el cuerpo.

b) Cuál es la tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria.

Resolución

a) Determinamos en primer lugar el peso del cuerpo en unidades del SI, que resulta ser

$$p = 2 \text{ kp} \cdot 9{,}8 \text{ N kp}^{-1} = 19{,}6 \text{ N}$$

En el punto más alto de la trayectoria A,

$$F_{cA} = T_A + P$$

y en el punto más bajo de la trayectoria B,

$$F_{cB} = T_B - P$$

por lo tanto,

$$F_{cB} = 100 \text{ N} - 19{,}6 \text{ N} = 80{,}4 \text{ N}$$

y al ser

$$F_{cB} = m\,\frac{v_B^2}{r} = 2 \text{ kg}\,\frac{v_B^2}{1 \text{ m}}$$

de donde

$$v_B = 6{,}3 \text{ m s}^{-1}$$

b) Dado que en el punto más alto de la trayectoria la velocidad angular vale lo mismo que en el punto más bajo, la fuerza centrípeta también tendrá el mismo valor que en el punto B, es decir, $F_{cA} = 80{,}4$ N, y como

$$F_{cA} = T_A + P$$

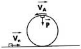
$$T_A = F_{cA} - P = 80{,}4 \text{ N} - 19{,}6 \text{ N} = 60{,}8 \text{ N}$$

9. Una vagoneta circula por una vía recta horizontal y ha de hacer un rizo vertical de 22,5 m de radio. Calcular:

a) Velocidad mínima que ha de llevar en el punto más alto del rizo.

b) Velocidad mínima que ha de llevar en el tramo horizontal.

Resolución



a) En el punto más alto del rizo A, el valor mínimo de la fuerza centrípeta es

$$\vec{F}_{cA} = \vec{P}$$

$$m \frac{v_A^2}{r} = m \cdot g$$

de donde

$$v_A = \sqrt{rg} = \sqrt{22{,}5 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2}} = 14{,}8 \text{ m s}^{-1}$$

b) En cualquier punto del tramo horizontal, la vagoneta ha de llevar una velocidad tal que su energía cinética se pueda transformar en el rizo en la energía potencial que la vagoneta adquiere en A. Esto nos conduce a

$$v_h = \sqrt{2g \cdot 2r} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 45 \text{ m}} = 29{,}7 \text{ m s}^{-1}$$

10. Un avión con una masa de 10^4 kg vuela a una velocidad de módulo constante de 0,2 km s^{-1}, describiendo una circunferencia horizontal de 1,5 km de radio.

a) ¿Cuál es la velocidad angular del avión?

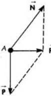
b) Hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre el avión en un plano vertical que contenga al avión y al centro de la trayectoria. Determinar la magnitud y la dirección de la resultante.

c) Explicar, por qué el avión ejerce una fuerza sobre un pasajero. ¿En qué dirección actúa esta fuerza?

Resolución

a) La velocidad angular será

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0{,}2 \text{ km s}^{-1}}{1{,}5 \text{ km}} = 1{,}33 \text{ rad s}^{-1}$$



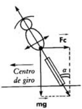
b) La fuerza centrípeta $\vec{F_c}$ necesaria para girar, que es horizontal, es originada conjuntamente por el peso $\vec{P}$ y la fuerza de sustentación $\vec{N}$.

La magnitud de la fuerza centrípeta será

$$F_c = m\,\frac{v^2}{r}\; 10^4 \text{ kg} \cdot \frac{(200 \text{ m s}^{-1})^2}{1500 \text{ m}} = \mathbf{2{,}66 \cdot 10^5 \text{ N}}$$

c) El pasajero, que sufre el mismo giro que el avión, debe estar sometido a la misma fuerza centrípeta que éste, pues de otro modo continuaría en línea recta siguiendo el Principio de la inercia y chocaría con la pared lateral externa del avión, que al girar rectifica su trayectoria.

11. Un ciclista da una vuelta en una pista circular de 805 m de longitud con una velocidad constante de 9,15 m s^{-1}. ¿Cuál debe ser su inclinación respecto a la vertical?



Resolución

Observando la figura en la que representamos el sistema no inercial (visto por el ciclista) para una inclinación a, podemos poner

$$\text{tg } a = \frac{F_c}{mg}$$

Como

$$F_c = m \frac{v^2}{r}$$

hemos de calcular previamente el radio de la pista, que resulta ser

$$r = 805/2\pi \qquad m = 128{,}1 \text{ m}$$

por lo tanto,

$$\text{tg } a = \frac{F_c}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \frac{9{,}15^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{128{,}1 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2}} = 6{,}6 \cdot 10^{-2}$$

de donde

$$a = \text{arctg } 6{,}6 \cdot 10^{-2} = 3°46'$$

12. Un cohete quema 7260 kg de combustible en 60 s. La velocidad de salida de los gases en el escape, supuesta constante, es de 1830 m s^{-1}. ¿Cuál es el impulso medio que recibe el cohete?

Resolución

El impulso recibido será igual a la variación de la cantidad de movimiento, y teniendo en cuenta que suponemos inicialmente al cohete en reposo

$$\text{Impulso} = m \cdot v = 7260 \text{ kg} \cdot 1830 \text{ m s}^{-1} = 1{,}32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Por la forma del enunciado parece que la pregunta se refiere más bien a la fuerza media que actúa sobre el cohete, que podremos evaluar como

$$F = \frac{1{,}32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{s}}{60 \text{ s}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ N}$$

13. Un bloque de 100 g de masa, inicialmente en reposo sobre un plano horizontal, está sometido a una fuerza

$$F = 10 + 3t$$

en donde F viene expresado en dinas y t en segundos. Se considera que no hay rozamiento. Calcular:

a) El impulso durante los primeros 5 s.

b) Velocidad del bloque cuando $t = 5$ s.

c) Trabajo realizado durante los primeros 5 s.

Resolución

La dina, unidad de fuerza en el sistema (cgs), equivale a 10^{-5}N, y la ley que nos proporcionan la podremos expresar para el SI como

$$F = 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5}\, t$$

a) El impulso en los primeros 5 s. valdrá

$$\int_0^5 (10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5}\, t)\, dt = [10^{-4}\, t + 1{,}5 \cdot 10^{-5}\, t^2]_0^5 = \\ = 8{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}$$

b) Aplicando el Principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$8{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s} = 0{,}1 \text{ kg} \cdot v$$
$$v = 8{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

c) El trabajo se ha invertido en incrementar la energía cinética del bloque

$$W = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot (8{,}75 \cdot 10^{-2})^2 \text{ J} = 3{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

14. En la proa de una barca, que está inicialmente en reposo y cuyo rozamiento con el agua despreciamos, se encuentra una persona que lanza un fardo de 5 kg, con una velocidad horizontal de 6 m s^{-1} hacia la popa, donde lo recoge otra persona. La masa total de la barca y las dos personas es de 300 kg. Justificar por qué se mueve la barca cuando se lanza el fardo, y determinar cuál es la velocidad de la barca:

a) Cuando el fardo está en el aire.

b) Cuando la segunda persona lo detiene.

Resolución

a) Como al no existir fuerzas exteriores debe conservarse la cantidad de movimiento total del sistema, si la cantidad de movimiento que posee el fardo cuando está en el aire es de

$$\vec{p}_f = m_f \cdot \vec{v}_f = 30\,\vec{i} \qquad \text{(SI)}$$

y la cantidad de movimiento adquirida por el sistema barca-personas (inicialmente en reposo) debe ser igual y opuesta a la del fardo, entonces la cantidad de movimiento total debe seguir siendo nula

$$\vec{p}_s = -\vec{p}_f = -30\,\vec{i} \qquad \text{(SI)}$$

como por otra parte

$$\vec{p}_s = m_s \cdot \vec{v}_s$$

$$\vec{v}_s = \frac{-30\,\vec{i}}{300} \qquad \text{(SI)}$$

es decir

$$\vec{v}_s = -0{,}1\,\vec{i}\ \text{m s}^{-1}$$

b) Al detenerse el fardo debe detenerse el sistema barca-personas, pues la cantidad total de movimiento del sistema, al no haber actuado fuerzas exteriores al mismo, ha de continuar siendo constante y, en este caso, nula.

La barca se ha desplazado porque al no existir fuerzas exteriores no podía cambiar la posición del centro de masas del sistema barca-personas-fardo que se encontraba en reposo, y al desplazarse el fardo era obligado que se moviese el resto del sistema para conservar la posición del centro de masas.

15. Un helicóptero de 810 kg de masa se mantiene en posición estacionaria e imprime a todo el aire comprendido en un área de 30 m² una determinada velocidad v hacia abajo. Si la densidad del aire es de 1,20 kg m^{-3}, calcular el valor de v. ¿Cuál es la potencia necesaria para sustentar al helicóptero en esta posición?

Resolución

El peso del helicóptero será compensado por la fuerza que origina, por unidad de tiempo, la variación de la cantidad de movimiento. El peso del helicóptero es

$$810 \text{ kp} \cdot \frac{9{,}8 \text{ N}}{1 \text{ kp}} = 7938 \text{ N}$$

y la masa de aire que el helicóptero impulsa hacia abajo en cada segundo es la de un cilindro de aire de 30 m² de base y v m de altura

$$m = v \cdot d = S \cdot v \cdot d = 30 \cdot v \cdot 1{,}2 \text{ kg} = 36\ v \text{ kg}$$

Por lo tanto,

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v$$

$$7938 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} = 36\ v \cdot v = 36\ v^2 \text{ kg m s}^{-1}$$

y de aquí

$$\boldsymbol{v = 14{,}85 \text{ m s}^{-1}}$$

Supuesto que la velocidad que el helicóptero imprime al aire permanece constante a partir del momento de referencia

$$\boldsymbol{P = F \cdot v = 117{,}8 \text{ kW}}$$

16. Un disco, que se encuentra en reposo, tiene un radio de 0,40 m y un momento de inercia de 2 kg m². Se le aplica, tangente a su periferia, una fuerza constante de 100 N. Determinar:

a) Velocidad angular de la rueda 10 s después de iniciado el movimiento.

b) Energía cinética a los 10 s de iniciado el movimiento.

Resolución

a) Para poder hallar la velocidad determinamos en primer lugar el valor de la aceleración angular, haciendo uso de la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación.

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{F \cdot r}{I} = \frac{100 \text{ N} \cdot 0{,}40 \text{ m}}{2 \text{ kg m}^2} = 20 \text{ rad s}^{-2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \text{ rad s}^{-1} + 20 \text{ rad s}^{-2} \cdot 10 \text{ s} = 200 \textbf{ rad s}^{-1}$$

b) La energía cinética será exclusivamente de rotación.

$$E_C\ rot = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\ 2 \text{ kg m}^2 \cdot (200 \text{ rad s}^{-1})^2 = 40000 \text{ J}$$

17. Un disco horizontal gira libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro a razón de 2 vueltas por segundo. Se deja caer un trozo de cera de 10 g sobre el disco a una distancia de 10 cm del eje, y se adhiere a él. La velocidad angular del disco disminuye por esto a 60 vueltas por minuto. Calcular el momento de inercia del disco.

Resolución

Como en un sistema aislado el momento angular se conserva, podemos decir que

$$\Delta I\omega = 0$$

Expresaremos en primer lugar los valores de las velocidades en el SI.

$$\omega_0 = 2 \text{ r.p.s.} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} = 4\ \pi \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega = 60 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$$

El momento angular antes del impacto es exclusivamente el del disco, puesto que el trozo de cera no gira

$$L_0 = I\ \omega_0 = I \cdot 4\pi \qquad \text{(SI)}$$

El momento angular después del impacto lo calculamos teniendo en cuenta que el disco y la cera giran solidariamente y que el momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia (consideramos puntual el fragmento de cera):

$$L = (I + 0{,}1^2 \cdot 0{,}01) \cdot 2\pi \qquad \text{(SI)}$$

Al tener que consevarse el momento cinético

$$L = L_0$$

es decir

$$4\pi\ I = 2\pi\ I + 2\pi \cdot 10^{-4} \qquad \text{(SI)}$$

de donde

$$\boldsymbol{I = 10^{-4}\ \text{kg m}^{-2}}$$

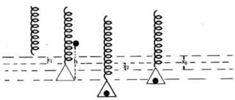
18. Una esfera de masa m se deja caer desde una altura h sobre un platillo sujeto a un muelle vertical de constante recuperadora K. El choque se puede considerar perfectamente inelástico. Hallar la amplitud de la oscilación que se produce.

Resolución

El muelle estará inicialmente estirado una longitud x_1 debido al peso del platillo de masa M

de modo que

$$x_1 = \frac{Mg}{K}$$



Cuando la esfera choque con el platillo poseerá una velocidad

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Si aplicamos el Principio de conservación de la cantidad de movimiento al sistema platillo-esfera, podremos calcular la velocidad que llevan después del choque.

$$m\, v_1 = (m + M)\, v_2$$

$$v_2 = \frac{m}{M + m}\, v_1$$

Tras el choque la energía mecánica permanece constante. Por lo tanto, si tomamos como referencia la posición más baja que alcanza el platillo,

Energía mecánica en el instante del impacto =
= Energía mecánica en la posición más baja

es decir,

$$\frac{1}{2}\, Kx_1^2 + (m + M)\, gx_2 + \frac{1}{2}\, (m + M)v_2^2 = \frac{1}{2}\, K\, (x_1 + x_2)^2$$

expresión que nos permite conocer el valor de x_2, medida en que se alarga el muelle por efecto del impacto de la esfera sobre el platillo.

Como en el sistema que va a oscilar armónicamente pendiendo del muelle es el sistema esfera-platillo, habremos de determinar su posición de equilibrio antes de determinar la amplitud del movimiento. La posición de equilibrio la determinamos partiendo de la ley de Hooke

$$Kx_0 = (m + M)\, g$$

de donde

$$x_0 = \frac{m + M}{K}\, g$$

y conocidos x_1, x_2 y x_0, podemos, como se ve en la figura, conocer A, pues

$$A = x_1 + x_2 - x_0$$

Ejercicios propuestos

Salvo indicación en contra, adoptaremos para g el valor constante de 9,8 m s^{-2} y consideraremos los cuerpos como puntos materiales.

1. Una masa de 10 kg reposa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se tira de ella con una fuerza de 20 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo en el instante en que haya avanzado 3 m bajo la acción de la fuerza de tracción?

Solución

$\boldsymbol{v} = \mathbf{3{,}2\ m\ s^{-1}}$.

2. Se requiere una fuerza de 100 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal para arrastrar un trineo con velocidad uniforme a lo largo de un suelo horizontal. Calcular:

a) Trabajo que realiza la fuerza aplicada para desplazar el trineo una distancia de 10 m.

b) Valor de la fuerza de rozamiento que hace el suelo sobre el trineo.

Solución

a) $\boldsymbol{W} = 500$ **J** ; *b)* $\boldsymbol{F_r} = 50$ **N.**

3. ¿Cuál es el peso máximo que puede tener un objeto si una fuerza horizontal de 5,5 N lo mueve sobre una superficie de 0,03 de coeficiente de rozamiento?

Solución

183,3 N.

4. Una fuerza de 5 N produce una aceleración de 8 m s^{-2} sobre una masa m_1 y una aceleración de 24 m s^{-2} sobre una masa m_2. ¿Qué aceleración produciría sobre las dos masas si estuviesen juntas?

Solución

$\boldsymbol{a} = 6$ **m s^{-2}.**

5. Por un plano inclinado de 3 m de altura y 4 m de base se traslada con velocidad constante un bloque de 100 kg, mediante una fuerza paralela al desplazamiento (no hay rozamiento).

a) ¿Qué trabajo se ha realizado cuando el bloque llega al final del plano inclinado?

b) ¿Con qué fuerza se ha empujado al bloque?

c) ¿Cuál ha sido la ventaja de emplear el plano inclinado?

Solución

a) $\boldsymbol{w} = 2940$ **J ;** *b)* **588 N ;** *c)* **El mismo trabajo se puede realizar facilitando el esfuerzo (hay que hacer menos fuerza).**

6. Un bloque de 29 kg que estaba en reposo en el punto más alto de un plano inclinado de 3 m de altura por 5 m de largo resbala sobre el mismo y llega abajo con una velocidad de 2 m s^{-1}. Calcular:

a) Energía que se pierde.

b) Fuerza de rozamiento.

Solución

a) **Se pierden 794,6 J ;** *b)* $\boldsymbol{F_r} = 158{,}9$ **N.**

7. Un muelle de 500 N m^{-1} de constante recuperadora se comprime 20 cm empujándole con un bloque de 2 kg. Se deja en libertad y el muelle proyecta al bloque sobre una superficie horizontal sin rozamiento que continúa en un plano inclinado 45° sin rozamiento. Calcular:

a) Velocidad del bloque cuando se separa del muelle.

b) Distancia que recorrerá el bloque sobre el plano inclinado.

Solución

a) $\boldsymbol{v} = \mathbf{3{,}16\ m\ s^{-1}}$; *b)* $\boldsymbol{l} = \mathbf{0{,}72\ m}$.

8. Una caja de embalaje de 50 kg de masa baja por un plano inclinado 30°. La aceleración de la caja es de 2 m s^{-2} y el plano inclinado mide 10 m de longitud. Calcular:

a) Energía cinética de la caja cuando llega a la parte más baja del plano inclinado.

b) Valor de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la caja cuando está bajando.

c) Si en la base del plano inclinado hay una superficie horizontal con el mismo coeficiente de rozamiento dinámico, ¿a qué distancia se parará la caja?

Solución

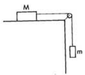
a) $\boldsymbol{E}_c = \mathbf{1000\ J}$; *b)* $\boldsymbol{F}_r = \mathbf{145\ N}$; *c)* $\mathbf{d = 6\ m}$.

9. Dejamos bajar un cuerpo por un plano inclinado de 100 cm de longitud y 60 cm de altura medida desde la base. Determinar la aceleración del cuerpo y el tiempo que tarda en llegar abajo si el coeficiente de rozamiento vale 0,1.

Solución

$\boldsymbol{a} = \mathbf{5{,}1\ m\ s^{-2}}$; $\boldsymbol{t} = \mathbf{0{,}62\ s}$.

10. De acuerdo con el sistema mecánico mostrado en la figura, un cuerpo de masa $M = 2{,}6$ kg se desliza sobre un plano



horizontal debido al peso de un segundo cuerpo de masa $m = 1{,}4$ kg, unido al primero por un hilo inextensible y sin peso soportado por una polea ideal. Calcular:

a) Aceleración del cuerpo M si éste presenta con el plano horizontal un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}3$.

b) Manteniendo el mismo valor del coeficiente de rozamiento, ¿cuál es la energía cinética de M después de transcurridos 2 s desde que comenzó el movimiento? Supóngase que en el instante inicial la velocidad del cuerpo es nula.

Solución

a) $\boldsymbol{a} = 1{,}5$ **m s**$^{-2}$ **;** *b)* $\boldsymbol{E_c} = 11{,}7$ **J.**

11. Un bloque de 8 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal y se une, mediante una cuerda que pasa por una polea sin peso, a un bloque colgado de 8 kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal es de 0,5. Determinar:

a) Tensión de la cuerda.

b) Aceleración de cada bloque.

Solución

a) $\boldsymbol{T} = 58{,}8$ **N ;** *b)* **La aceleración es la misma para los dos bloques:** $\boldsymbol{a} = 2{,}45$ **m s**$^{-2}$

12. ¿Cuál es el ángulo entre dos cuerdas de una hamaca, cuando la tensión de cada una de ellas es igual al peso de la persona que está en la hamaca?

Solución

120°.

13. La carga de un electrón es de $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C y se mueve en torno a un protón de carga positiva $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. La masa del electrón es de $9 \cdot 10^{-28}$ g. La distancia del protón al electrón es de $5 \cdot 10^{-8}$ cm. Calcular:

a) Fuerza centrípeta que actúa sobre el electrón.

b) Velocidad del electrón.

c) Frecuencia de la revolución.

Solución

a) $f_c = 9{,}2 \cdot 10^{-10}$ **N** ; *b)* $v = 7{,}15 \cdot 10^5$ **m s**$^{-1}$; *c)* ***frec*** $= 2{,}27 \cdot 10^{14}$ **Hz**

14. Una explosión rompe una roca en tres trozos. Dos de ellos, de 1 kg y 2 kg de masa salen en ángulo recto con velocidades de 12 m s^{-1} y 8 m s^{-1}, respectivamente. El tercer fragmento sale con una velocidad de 40 m s^{-1}.

a) Dibujar un esquema en que se muestre la dirección y sentido del tercer fragmento.

b) ¿Cuál era la masa de la roca?

Solución

$M = 3{,}5$ **kg.**

15. Un protón de $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ g de masa tiene una velocidad de $3 \cdot 10^7$ m s^{-1} y choca con un núcleo de oxígeno, inicialmente en reposo de $2{,}56 \cdot 10^{-23}$ g de masa. El protón sale en una dirección que forma un ángulo de 90° con respecto a la trayectoria inicial. Calcular la velocidad y la dirección del núcleo de oxígeno.

Solución

Suponiendo que la velocidad del protón tiene el mismo valor después y antes del choque, la velocidad del núcleo de oxígeno resulta ser de $2{,}6 \cdot 10^6$ m s^{-1}, y la dirección de su trayectoria forma un ángulo de 135° con la nueva trayectoria del protón.

16. Un peso de 1000 kg cae desde una altura de 8 m sobre una estaca vertical y ésta se introduce 0,5 m en el suelo. Calcular la fuerza con la que el suelo se opone a la penetración.

Solución

$\boldsymbol{F} = 166600$ **N.**

17. Supongamos que la Tierra fuese perfectamente esférica con un radio de 6.400 km.

a) ¿Cuánto disminuirá el peso de un hombre de 90 kg de masa en el ecuador en comparación con su peso en el Polo Norte por efecto de la rotación terrestre?

b) ¿A qué velocidad habría de girar la Tierra para que este hombre no ejerciera ninguna fuerza al estar suspendido de un dinamómetro en el ecuador?

c) ¿Qué relación existe entre la velocidad deducida en *b)* y la velocidad real de rotación de la Tierra?

Solución

a) **El peso disminuirá en 3 N ;** *b)* $\omega = 1{,}23 \cdot 10^{-3}$ **rad** $\mathbf{s^{-1}}$**;** *c)* **la velocidad deducida es 17 veces mayor que la velocidad real.**

18. Un cuerpo de 500 g pende de un muelle. Cuando se estira 10 cm bajo su posición de equilibrio y se abandona el sistema a sí mismo, la masa oscila con un período de 2 s. Calcular:

a) Velocidad al pasar por la posición de equilibrio.

b) Aceleración cuando está a 10 cm por encima de su posición de equilibrio.

c) ¿Cuánto se acortará el muelle cuando se retire la masa que pende del mismo?

Solución

a) $\boldsymbol{v}_0 = 0{,}31$ **m** $\mathbf{s^{-1}}$ **;** *b)* $\boldsymbol{a}_{10} = 0{,}98$ **m** $\mathbf{s^{-2}}$ **;** *c)* $\boldsymbol{x} = 0{,}99$ **m.**

Esta colección tiene como objetivo presenta material que, a la vez que valioso pedagógicam sirva de excelente guía práctica para prepara temas de COU y Selectividad, tanto en el asp de conocimientos como en lo referente a ejerc prácticos. Por ello, la colección está concebid forma de cuadernos, para que cada profesor o a no trabaje aquellos temas que considere más cuados a sus intereses.

Cada cuaderno ofrece la siguiente estructura:

- *Recordatorio de puntos fundamentales.*
- *Cuestiones de autoevaluación.*
- *Ejercicios resueltos.*
- *Ejercicios propuestos, con su solución.*

Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

ÍNDICE DE TÍTULOS

ISBN 84-205-2124-8

00000

9 788420 521244

Alhambra Longman